Grundpraktikum

T4: Zustandsgleichung idealer Gase

Autor:
[redacted]

Partner:
[redacted]

Versuchsdatum: [redacted]
Versuchsplatz: [redacted]
Abgabedatum: [redacted]

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch T4 erlaubt es, basierend auf den Gesetzen von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac, mit Hilfe eines Gasthermometers den Spannungskoeffizienten γ von Luft und schließlich die Zimmertemperatur T_z zu bestimmen. Ausführliche Informationen zu den physikalischen Grundlagen und dem Versuchsaufbau, sowie die in runden Klammern zitierten Formeln, befinden sich im gelben Skript [3, S. 78-82], deswegen soll hier nur ein kurzer Überblick über die allgemeine Vorgehensweise folgen.

Mit einem Jollyschen Gasthermometer wird über die Steighöhe einer Quecksilbersäule der Druck in einem Gaskolben bei Raumtemperatur, um den Gefrierpunkt und nahe dem Siedepunkt bestimmt. Nach Formel (17) kann dann noch die genaue Siedetemperatur bei dem vorherrschenden Umgebungsdruck p_u berechnet werden. Schließlich wird nach der im Skript gegebenen Formel (16) der Spannungskoeffizient γ ausgerechnet, der in Gleichung (7) zur Bestimmung der Zimmertemperatur verwendet werden kann.

2 Messwerte und Auswertung

Vor Beginn der Messungen wurde die Raumtemperatur $T_{z_0} = (22 \pm 0,2)\ °C$ und der Umgebungsdruck $p_u = (101600 \pm 100)\ Pa$ mit einem Digitalthermometer und -manometer bestimmt, wobei die Unsicherheiten den systematischen Fehlern dieser Geräte entsprechen. Im Falle des Thermometers gilt $u_T = (T_{mess} \cdot 10^{-4} + 0,2)\ °C$, für das Manometer wurde ein systematischer Fehler von einem Digit, d.h. 100 Pa angenommen.

Die Messungen mit dem Gasthermometer wurden skriptgemäß durchgeführt, die Messwerte sind in Tab. 1 im Anhang dargestellt. Zuerst erfolgte die Messung von 10 Werten bei Raumtemperatur T_{z_0}, dann um den Gefrierpunkt T_0 und schließlich um den Siedepunkt T_s. Der genaue Richtwert für T_s bestimmt sich dabei nach Formel (17) zu $T_{s_0} = (100,08 \pm 0,03)\ °C$, wobei sich die Unsicherheit nach Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (17) aus u_{p_u} ergibt.

Vor der Aufnahme der Messreihen wurde jeweils per Digitalthermometer die Temperatur um den Gaskolben kontrolliert. Bei der Messung um T_s fiel die Temperatur im Heizwasser schnell ab, deswegen wurde die automatische Abschaltung des benutzten Wasserkochers während der Messung manuell überbrückt, wodurch eine nahezu gleichbleibende Temperatur nahe dem gewünschten Siedepunkt garantiert werden konnte. T_0 und T_{z_0} veränderten sich über den Messzeitraum nicht signifikant.

$$T_{z_0} = (22,0 \pm 0,2)\ °C$$
$$T_0 = (0,1 \pm 0,2) °C$$
$$\overline{T}_s = (100,2 \pm 0,3)\ °C$$

Die Unsicherheiten der Temperaturmessungen ergeben sich hier wieder aus dem systematischen Fehler des Thermometers. Da sich T_s schnell zu ändern drohte, wurde hier während jeder Einzelmessung die Temperatur notiert. Durch die oben genannte Methode konnte die Varianz jedoch sehr klein gehalten werden ($\approx 0,018\ °C$), und für die Unsicherheit des Mittelwertes dominiert folglich auch der systematische Fehler den statistischen Fehler um eine Größenordnung, Letzterer wurde daher vernachlässigt.

Aus der als Differenz zur Nullmarke gemessenen Steighöhe h_x des Quecksilbers ergibt sich nun der im Kolben vorherrschende Druck: die Steighöhe in mm wird mit 133,3 multipliziert, um einen Wert in Pa zu erhalten, auf den dann der Umgebungsdruck p_u addiert wird. Über die so gefundenen je 10 Werte für T_{z_0}, T_0 und T_s wird nun gemittelt:

$$\overline{p}_z = (106178,9 \pm 167,25)\ Pa$$
$$\overline{p}_0 = (98034,2 \pm 170,52)\ Pa$$
$$\overline{p}_s = (133722,0 \pm 168,13)\ Pa$$

Die Unsicherheiten für die Drücke p_x ergeben sich durch pythagoräische Addition aus den Unsicherheiten der Steighöhen u_{h_x} und des Umgebungsdrucks u_{p_u}. Dabei setzt sich u_{h_x} wiederum pythagoräisch aus dem statistischen Fehler in Form des Vertrauensbereiches über die 10 Höhenmessungen, sowie einem systematischen Ablesefehler zusammen, der mit 1 mm abgeschätzt wurde. Die relativ grobe Abschätzung ergibt sich aus dem Umstand, dass die Spiegelskale je Messung zwei Mal benutzt wird (zur Nullpunktbestimmung und Ablesen des Messwertes), und nicht viel genauer als etwa 0,5 mm abgelesen werden kann.

Nun kann nach Formel (16) der gesuchte Spannungskoeffizient γ bestimmt werden:

$$\gamma = \frac{p_s - p_0}{p_0 \cdot T_{s_0}} \tag{16}$$

Für die Berechnung der Unsicherheit u_γ muss aufgrund der gemeinsamen Abhängigkeit von p_0, p_s und T_{s_0} von p_u eine korrelierte Fehlerrechnung durchgeführt werden. Um diese aufwändige Prozedur zu umgehen wurde für jede dieser Größen die zugrundeliegende Formel in (16) eingesetzt:

$$\gamma = \frac{p_s - p_0}{p_0 \cdot T_{s_0}} = \frac{(p_u + h_s a) - (p_u + h_0 a))}{(p_u + h_0 a) \cdot (100 + b(p_u - c))} \tag{16'}$$

mit $a = 133,3$, $b = 2,81 \cdot 10^{-4}$, und $c = 10,13 \cdot 10^4$. Nun kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Terme angewendet werden, die Ableitungen nach den einzelnen Termen befinden sich um Anhang.

Mit Hilfe des so bestimmten Spannungskoeffizienten γ kann nun die Raumtemperatur T_z ermittelt werden. Durch umstellen der Formel (7) aus dem Skript ergibt sich:

$$T_z = \frac{p_z - p_0}{p_0 \cdot \gamma} \tag{7'}$$

Wiederum müsste die Unsicherheit u_{T_z} korreliert berechnet werden, was mit einem Einsetzen der entsprechenden Berechnungsformeln in (7') umgangen werden kann:

$$T_z = \frac{p_z - p_0}{p_0 \cdot \gamma} = \frac{(p_u + h_z a) - (p_u + h_0 a)}{(p_u + h_0 a) \cdot \gamma} \tag{7''}$$

wobei wieder $a = 133,3$ und für γ Formel (16') eingesetzt wird. Mit den Ableitungen nach p_u, h_0, h_z und h_s kann dann die Unsicherheit durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes für unkorrelierte Terme berechnet werden.

Die vollständigen Messergebnisse[1] des Versuchs T4: Zustandsgleichungen idealer Gase lauten damit:

$$\gamma = (3,642 \pm 0,024) \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{K}$$

$$T_z = (22,8 \pm 0,5)\ °C$$

3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Beim Vergleich des gefundenen $\gamma = (3,642 \pm 0,024) \cdot 10^{-3}\ ^1/_K$ mit dem im Skript angegebenen $\gamma_S = ^1/_{273,15K} = (3,661 \cdot 10^{-3})\ ^1/_K$, und der berechneten Raumtemperatur $T_z = (22,8 \pm 0,5)\ °C$ mit der direkten Messung $T_{z_0} = (22 \pm 0,2)\ °C$ sind drei Faktoren zu beachten, bevor die Güte der Messergebnisse eingeschätzt werden kann:

1. Die Messung erfolgte mit Luft, das in den Rechnungen als ideales Gas angenommen wurde. Luft besteht in Wirklichkeit aber aus einer Vielzahl unterschiedlicher Moleküle, ist also nur annähernd ein ideales Gas. Die Berechnung von γ beruht also streng genommen auf Formeln, die erst noch an ein reales Gas angepasst werden müssten. Laut [4] liegt der reelle Spannungskoeffizient für Luft bei $\gamma_L = (3,674 \cdot 10^{-3})\ ^1/_K$, also etwas höher als der theoretische Wert für ideale Gase von $\gamma_S = (3,661 \cdot 10^{-3})\ ^1/_K$. Ein Vergleich des Messwertes kann also sinnvoll nur mit γ_L erfolgen.

2. Bei den Berechnungen wurde die Ausdehnung des Glasgefäßes vernachlässigt. Die Größe des Effekts ist zwar ohne weitere Kenntnisse von Geometrie und Materialeigenschaften (Ausdehnungskoeffizient) des verwendeten Thermometers nicht zu bestimmen, doch die Richtung lässt sich einfach ermitteln: bei den Berechnungen wurde von einem isochoren Prozess ausgegangen, in diesem Fall lassen sich die Volumina bei den verschiedenen Temperaturen in Formel (7) wegkürzen. In der Realität ist jedoch bei T_s das Volumen des Kolbens größer als bei T_0. Die Volumina in (7) lassen sich also nicht mehr wegkürzen, sondern ergeben - auf eine Seite gebracht - einen Faktor > 1 vor p_t. Im Falle der Berechnung von γ nach (16) bedeutet dies also einen Faktor > 1 vor p_s, d.h. das hier berechnete γ fällt zu klein aus.

3. Ein weiterer unberücksichtigter Effekt ist das Vorhandensein von nicht erhitzter Luft in der Kapillare, die den Gaskolben mit dem Messrohr verbindet. Es darf angenommen werden, dass diese Luft etwa bei Raumtemperatur verbleibt und somit eine Art "Puffer" für die Druckmessung darstellt: der Druck im Kolben und der Druck in

[1] Die Rundung der Unsicherheit und damit auch des Messwertes selbst wurde - eventuell von der Praktikumskonvention abweichend - nach den in [1] vorgeschlagenen Regeln vorgenommen. Zur Lokalisierung der Rundungsstelle bei Messunsicherheiten steht dort: "Von links beginnend ist die erste von Null verschiedene Ziffer zu suchen. Ist diese eine der Ziffern 3 bis 9, so ist sie die Rundestelle; ist die erste von Null verschiedene Ziffer eine 1 oder 2, so ist die Stelle rechts daneben die Rundestelle."

der Kapillare vermengen sich zum gemessenen Druck. Wenn nun beispielsweise bei T_s gemessen wird, dann ist der gemessene Druck $p_{s,\mathrm{mess}}$ kleiner als der im Kolben tatsächlich vorherrschende $p_{s,\mathrm{real}}$. Bei der Messung an T_0 gibt es den umgekehrten Effekt, der aber aufgrund der geringeren Differenz zur Raumtemperatur deutlich kleiner ausfällt. Ein Blick auf Formel (16) zeigt, dass bei $p_{s,\mathrm{mess}} < p_{s,\mathrm{real}}$ das errechnete γ den wahren Wert wiederum leicht unterschätzt.

Festzuhalten ist, dass es drei bekannte systematische Messfehler gibt, die den gemessenen Wert für γ zu klein werden lassen. Damit kann auch erklärt werden, warum γ etwas unterhalb des in [4] genannten Vergleichswertes γ_L für Luft liegt.

Damit folgt sogleich auch die Erklärung für die Diskrepanz zwischen der errechneten Raumtemperatur T_z und dem Vergleichswert T_{z_0}. Nach Formel (7') wird deutlich, dass ein zu klein bestimmtes γ die Temperatur etwas zu hoch werden lässt. Da sich das Messergebnis dennoch recht nah am Vergleichswert befindet kann davon ausgegangen werden, dass dieser Effekt wiederum zwar nicht vernachlässigbar, aber doch relativ klein ist.

Abschließend bleibt zu sagen, dass das Experiment T4 mit relativ einfachen Mitteln erlaubt, den Spannungskoeffizienten und (vielleicht physikalisch noch interessanter) indirekt auch den absoluten Temperaturnullpunkt zu bestimmen. Die erreichte Genauigkeit ist dabei recht zufriedenstellend. Ein Blick auf die Fehlerbeiträge zu den Unsicherheiten der Messergebnissen (vgl. Tab. 2 im Anhang) zeigt, dass im Falle von u_γ die Unsicherheiten von h_0 und h_s etwa gleich eingehen, und u_{p_u} etwas weniger wichtig ist. Für u_{T_z} gilt, dass der Fehler von h_z dominiert, während u_{p_u} fast völlig vernachlässigbar ist. Für eine Verbesserung der Ergebnisse müsste also die Ablesegenauigkeit der Spiegelskale verbessert werden, denn sie ist maßgeblich für u_{h_z} sowie u_{h_0} und u_{h_s} verantwortlich. Natürlich könnten bei entsprechender Informationslage auch Korrekturrechnungen für die oben genannten Phänomene vorgenommen werden.

Literatur

[1] Herms, G. und Walter, G. *Einführung in die Behandlung von Messfehlern.* 2007. Online abrufbar unter http://www.iep.ovgu.de/iep_media/grundpraktikum/pdf/Online_Script_Walter_und_Herms.pdf (Stand 24. Juni 2012).

[2] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik.* 2007.

[3] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik.* 2012.

[4] Westphal, W.H. *Physikalisches Praktikum.* 1971.

Verwendete Software: *Microsoft Excel 2010, TeXstudio 2.3, Wolfram Mathematica 8.04*

A Anhang

Messwerte

Tabelle 1: Steighöhen in drei Temperaturbereichen

	Raumtemperatur		Schmelztemperatur		Siedetemperatur	
Messung	h_z [mm]	p_z [Pa]	h_0 [mm]	p_0 [Pa]	h_s [mm]	p_s [Pa]
1	34,50	106198,9	-28,50	97800,95	242,0	133858,6
2	34,00	106132,2	-27,50	97934,25	242,0	133858,6
3	34,50	106198,9	-27,50	97934,25	241,5	133792,0
4	34,00	106132,2	-27,00	98000,90	240,5	133658,7
5	34,00	106132,2	-26,50	98067,55	242,0	133858,6
6	34,50	106198,9	-26,00	98134,20	241,0	133725,3
7	34,50	106198,9	-26,50	98067,55	241,0	133725,3
8	35,00	106265,5	-26,00	98134,20	241,5	133792,0
9	34,50	106198,9	-26,00	98134,20	241,0	133725,3
10	34,00	106132,2	-26,00	98134,20	241,0	133725,3
Mittelwert	34,35	106178,9	-26,75	98034,2	241,35	133772,0
Standardabw.	0,34		0,86		0,53	
Vertrauensb.	0,11		0,27		0,17	
Syst. Fehler	1,00		1,00		1,00	
Unsicherheit	1,01	167,25*	1,04	170,52*	1,01	168,13*

* Die Unsicherheit der Drücke enthält $u_{p_u} = 100\ Pa$

Berechnung der Unsicherheiten

Die Ableitungen wurden jeweils verwendet, um die Unsicherheiten von γ und T_z nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu berechnen. Es wurde also jeweils die Ableitung mit dem entsprechenden absoluten Fehler multipliziert und die Ergebnisse pythagoräisch addiert.

Fehlerfortpflanzung für u_γ

$$\gamma = \frac{(p_u + h_s a) - (p_u + h_0 a))}{(p_u + h_0 a)(100 + b(p_u - c))}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial p_u} = -\frac{b(-ah_0 + ah_s)}{(ah_0 + p_u)(100 + b(-c + p_u))^2} - \frac{-ah_0 + ah_s}{(ah_0 + p_u)^2(100 + b(-c + p_u))}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h_0} = -\frac{a(-ah_0 + ah_s)}{(ah_0 + p_u)^2(100 + b(-c + p_u))} - \frac{a}{(ah_0 + p_u)(100 + b(-c + p_u))}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h_s} = \frac{a}{(ah_0 + p_u)(100 + b(-c + p_u))}$$

$$\text{mit} \quad a = 133,3 \quad b = 2,81 \cdot 10^{-4} \quad c = 10,13 \cdot 10^4$$

Fehlerfortpflanzung für u_{T_z}

$$T_z = \frac{(p_u + h_z a) - (p_u + h_0 a)}{(p_u + h_0 a) \cdot \gamma}$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial h_0} = -\frac{a(100 + b(-c + p_u))}{-ah_0 + ah_s} + \frac{a(-ah_0 + ah_z)(100 + b(-c + p_u))}{(-ah_0 + ah_s)^2}$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial h_s} = -\frac{a(-ah_0 + ah_z)(100 + b(-c + p_u))}{(-ah_0 + ah_s)^2}$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial h_z} = \frac{a(100 + b(-c + p_u))}{-ah_0 + ah_s}$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial p_u} = \frac{b(-ah_0 + ah_z)}{-ah_0 + ah_s}$$

mit $a = 133,3 \quad b = 2,81 \cdot 10^{-4} \quad c = 10,13 \cdot 10^4$ und γ aus (16')

Beiträge der Unsicherheiten der Einzelgrößen zu den Gesamtunsicherheiten

Tabelle 2: Beiträge der Unsicherheiten zu u_γ und u_{T_z}

	Spannungskoeff.	Zimmertemp.
x	$(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot u_x)^2$	$(\frac{\partial T_z}{\partial x} \cdot u_x)^2$
h_0	3,69E-10	8,92E-02
h_s	1,9E-10	7,44E-03
h_z	-	1,41E-01
p_u	2,24E-11	4,1E-05
u_{ges}	2,41E-05	0,487466